Seminar *Integrable Systeme und das KAM-Theorem*

Vortrag 2: Kanonische Transformationen und die lineare Theorie

Gabriele Benedetti

10. Januar 2019

1 Einführung

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Als Beispiele können wir M einfach als eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ oder als der Torus $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ betrachten. Es gibt viele Möglichkeiten, Koordinaten q auf M zu definieren, da man einen Koordinatenwechsel $q \mapsto Q(q)$ (auch Diffeomorphismus genannt) bilden kann. Es sei T^*M das Kotangentialbündel von M. Wenn $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ Koordinaten auf M sind, gewinnen wir automatisch kanonische Koordinaten $(q,p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ auf T^*M durch

$$\xi \in T^*M, \qquad \xi = p \cdot dq = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i.$$

(insbesondere ist T^*M lokal eine offene Menge des $\mathbb{R}^{2n}$). In den Beispielen gilt $T^*U = U \times \mathbb{R}^n$ und $T^*\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ und in diesen Fällen sind die p-Koordinaten global definiert. Allgemein induziert ein Koordinatenwechsel $q \mapsto Q(q)$ auf M einen Koordinatenwechsel $(q,p) \mapsto (Q(q), P(q,p))$, wobei

$$P(q,p) = p \cdot \left(d_q Q\right)^{-1}.$$

2 Hamiltonsche Gleichung

Im Vortrag 1 haben wir gesehen, dass, wenn $H : T^*M \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion ist, gewinnen wir ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{cases} \tag{2.1}$$

Wenn man

$$x := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \qquad X_H(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p}(x) \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q}(x) \end{pmatrix}$$

setzt, lässt sich (2.1) in der kompakteren Form

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{2.2}$$

schreiben. Das Vektorfeld X_H lässt sich auch mithilfe der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2n, 2n)$$

schreiben, wobei $I_n \in \mathrm{Mat}(n,n)$ die Identitätsmatrix ist. Die Matrix J wirkt auf die kanonische Basis als

$$J\frac{\partial}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad J\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i},$$

sodass $J^2 = -I_{2n}$ gilt. Also haben wir

$$X_H(x) = J\nabla H(x),$$

wobei $\nabla H(x)$ der Gradient von H in x ist, d.h. der Vektor dual zum Differential d_xH bezüglich des Standardskalarproduktes $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^{2n}$: $d_xH[\,\cdot\,] = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle$. In Koordinaten haben wir

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{n} dq_i^2 + dp_i^2, \qquad dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i, \qquad \nabla H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

In Matrixnotation ist dH ein Zeilenvektor, ∇H ein Spaltenvektor und $(dH)^T = \nabla H$.

3 Kanonische Transformationen

Es sei $u : T^*M \to T^*M$ ein Diffeomorphismus. Wenn x Lösung von (2.2) ist, was passiert mit $y := u^{-1}(x)$? Wir haben $\dot{x} = d_yu \cdot \dot{y}$ und, wenn wir $K := H \circ u : T^*M \to \mathbb{R}$ setzen,

$$d_yK = d_{u(y)}H \cdot d_yu, \qquad d.h. \qquad \nabla K(y) = (d_yu)^T \cdot \nabla H(u(y)).$$

Dann ist (2.2) äquivalent zu

$$-J\dot{x} = \nabla H(x) \quad \iff \quad -J \cdot d_yu \cdot \dot{y} = \nabla H(u(y)) \quad \iff \quad -(d_yu)^T J \cdot d_yu \cdot \dot{y} = \nabla K(y).$$

Also, wenn $(d_yu)^T J \cdot d_yu = J$ gilt, ist y eine Lösung der Hamiltonschen Gleichung mit Funktion K. Wir fassen was wir gefunden haben in eine Definition und einen Satz zusammen.

Definition 3.1. Ein Diffeomorphismus $u : T^*M \to T^*M$ heißt kanonisch, wenn $(d_y u)^T J \cdot d_y u = J$, für alle $y \in \mathbb{T}^*M$. Das heißt, dass für alle y das Differential $d_y u$ in der symplektischen Gruppe

$$\mathrm{Sp}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(2n, 2n) \mid A^T J A = J\}$$

liegt.

Aufgabe 3.2. *Zeigen Sie, dass* $\mathrm{Sp}(n)$ *eigentlich eine Untergruppe von* $GL(2n, \mathbb{R})$ *bildet, die geschlossene unter die Transposition ist. Zeigen Sie, dass* $\mathrm{Sp}(n)$ *eine Mannigfaltigkeit ist, finden Sie ihre Tangentialraum zu* I_{2n} *und ihre Dimension.*

Satz 3.3. *Wenn* $u : T^*M \to T^*M$ *kanonisch ist, dann gilt für alle* $H : T^*M \to \mathbb{R}$*:* x *löst die Gleichung* $\dot{x} = X_H(x)$ *genau dann wenn* $y = u^{-1}(x)$ *die Gleichung* $\dot{y} = X_K(y)$ *löst, wobei* $K := H \circ u$. □

Demnächst zeigen wir, dass kanonische Transformationen sich durch Hamiltonsche Flüße bilden lassen. Im Vortrag 3 werden wir kanonische Transformationen auf einer anderen Weise bilden und zwar mittels erzeugender Funktionen.

Satz 3.4. *Es sei* $H : T^*M \to \mathbb{R}$ *und* $\sigma : \mathbb{R} \times T^*M \to T^*M$ *der entsprechende Fluß. Dann ist der Diffeomorphismus* $\sigma(t, \cdot) : T^*M \to T^*M$ *kanonisch, für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es ist zu zeigen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}^T J \frac{\partial \sigma}{\partial x} = J.$$

Für $t = 0$ haben wir $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) = I_{2n}$ und die Gleichung ist klar. Um die Gleichung für alle t zu beweisen, reicht es nun zu zeigen, dass die linke Seite konstant in t ist. Zu diesem Zweck berechnen wir im Voraus

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} X_H(\sigma) = \frac{\partial X_H}{\partial \sigma}(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x} = J\mathrm{Hess}(H)\frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

wobei wir die Definition des Flusses $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = X_H(\sigma)$ und die Formel $X_H = J\nabla H$ benutzt haben. Wir leiten nun her:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \sigma}{\partial x}^T J \frac{\partial \sigma}{\partial x}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\Big)^T J \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}^T J \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}^T \Big((J\mathrm{Hess}(H))^T J + JJ\mathrm{Hess}(H)\Big)\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Da $\mathrm{Hess}(H)$ symmetrisch und J antisymmetrisch ist, verschwindet die Größe zwischen den Klammern, wie gewünscht. □

4 Die symplektische Form

Die Matrix J ist sehr nützlich, um die Eigenschaften von Hamiltonschen Gleichung lokal zu untersuchen. Die ist dennoch abhängig von den Koordinaten. Wir führen jetzt ein Objekt, das sowohl unabhängig von Koordinaten ist als auch die Hamiltonschen Gleichung bestimmt.

Definition 4.1. Die kanonische symplektische Form ist eine 2-Form auf T^*M (d.h. $\forall x \in T^*M,\ \omega_x : T_x(T^*M) \times T_x(T^*M) \to \mathbb{R}$ ist eine schiefsymmetrische Bilinearform, die glatt bezüglich x ist), die in kanonischen Koordinaten als

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

definiert ist.

Bemerkung 4.2. Allgemein, wenn V ein Vektorraum ist und ϕ_1, ϕ_2 Elemente des Dualraums V^* sind, definiert man die schiefsymmetrische Bilinearform $\phi_1 \wedge \phi_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ als

$$\phi_1 \wedge \phi_2(v, w) := \phi_1(v)\phi_2(w) - \phi_1(w)\phi_2(v), \qquad \forall\, (v, w) \in V \times V.$$

Aufgabe 4.3. *Zeigen Sie, dass ω die Darstellung*

$$\omega_x(v, w) = -v^T J w, \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^{2n}$$

in der Standardbasis von $T_x(T^*M)$ besitzt. Da J invertierbar ist, folgern Sie daraus, dass die Bilinearform ω_x nicht ausgeartet ist.

Aufgabe 4.4. *Es sei die 1-Form λ auf T^*M definiert als*

$$\lambda := p \cdot dq = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i.$$

Zeigen Sie, dass λ von der Wahl der kanonischen Koordinaten nicht abhängt und dass $d\lambda = \omega$. Folgern Sie daraus, dass auch ω von der Wahl der kanonischen Koordinaten nicht abhängt denn das äußere Differential Koordinatenunabhängig ist.

Wie versprochen können wir mittels ω das Vektorfeld X_H definieren. Wir berechnen

$$\omega(X_H, \cdot) = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i(X_H, \cdot) = \sum_{i=1}^{n} dp_i(X_H)dq_i - dq_i(X_H)dp_i = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i$$
$$= -dH.$$

Der Vektor X_H ist durch diese Gleichung eindeutig bestimmt, weil ω nicht ausgeartet ist.

Folgerung 4.5. *Für alle Funktionen $H : T^*M \to \mathbb{R}$ ist X_H der einzige Vektor, für den $\omega(X_H, \cdot) = -dH$. Insbesondere ist auch die Poissonklammer zwischen F und G unabhängig von Koordinaten und $\{F, G\} = -\omega(X_F, X_G)$.* □

Selbstverständlich können wir auch kanonische Transformationen mittels ω charakterisieren. Wenn u kanonisch ist, dann gilt

$$\omega(v, w) = v^T J w = v^T\big((d_y u)^T J d_y u\big)w = (d_y u \cdot v)^T J (d_y u \cdot w) = \omega(d_y u \cdot v, d_y u \cdot w) = u^*\omega(v, w).$$

Folgerung 4.6. *Ein Diffeomorphismus u ist kanonisch genau dann, wenn $u^*\omega = \omega$.* □

5 Erhaltung des Volumens

Die symplektische Form ist verbunden mit der Volumenform

$$\mathrm{Vol} = dq_1 \wedge dp_1 \wedge dq_2 \wedge dp_2 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dp_n.$$

Wir haben nämlich

$$\omega^n := \overbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}^{n \text{ Mal}} = n!\mathrm{Vol}.$$

Wenn A eine Matrix ist und α, β zwei Formen beliebigen Grades sind, dann gilt

$$A^*\big(\alpha \wedge \beta\big) = (A^*\alpha) \wedge (A^*\beta).$$

Also, wenn A symplektisch ist bekommen wir

$$A^*\mathrm{Vol} = A^*\Big(\frac{\omega^n}{n!}\Big) = \frac{1}{n!}(u^*\omega)^n = \frac{1}{n!}\omega^n = \mathrm{Vol}.$$

Laut der Definition der Determinante gilt $A^*\mathrm{Vol} = \det(A)\mathrm{Vol}$. Daraus folgern wir, dass eine symplektische Matrix Determinante 1 besitzt. Wenn wir diese Bemerkungen auf das Differential du einer kanonischen Transformation $u : T^*M \to T^*M$ aufwenden und erinnern uns an die Koordinatenwechselformel für Integrale, finden wir folgendes Resultat.

Folgerung 5.1 (Satz von Liouville)**.** *Wenn u kanonisch ist, erhält u das Volumen im Phasenraum T^*M. Insbesondere für jede Borel-Menge B haben wir*

$$\mathrm{Vol}(u^{-1}(B)) = \mathrm{Vol}(B). \qquad \square$$

Folgerung 5.2 (Poincares Wiederkehr)**.** *Es sei $H : T^*M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $A \subset T^*M$ eine Menge mit endlichem Volumen (z.B. A kompakt), die invariant unter dem Fluß σ von H ist. Es seien $B \subset A$ und $T > 0$ gegeben. Dann für fast alle $x \in B$ gibt es $t_x \geq T$ sodass $\sigma(t_x, x) \in B$.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge der Elementen $x \in B$, für die $\sigma(t, x) \notin B$ für alle $t \geq T$, null Volumen besitzt. Diese Menge ist in der Menge C aller $x \in B$, für die $\sigma(kT, x) \notin B$ für alle positive ganze Zahlen k gilt, enthalten. Wenn wir $u := \sigma(T, \cdot) : T^*M \to T^*M$ abkürzen, haben wir $\sigma(kT, x) = u^k(x)$ und können wir

$$C = \{x \in B \mid u^k(x) \notin B, \forall\, k \geq 1\}$$

schreiben. Wir behaupten, dass für alle $0 \leq m_1 < m_2$ gilt $u^{-m_1}(C) \cap u^{-m_2}(C) = \varnothing$. Wenn es ein $y \in A$ gäbe mit $u^{m_1}(y) \in C$ und $u^{m_2}(y) \in C$, dann $u^{m_2}(y) \in B$ aber $u^k(u^{m_1}(y)) = u^{k+m_1}(y) \notin B$ für alle $k \geq 1$. Man wähle $k = m_2 - m_1$ um einen Widerspruch zu bekommen. Da u kanonisch nach Satz 3.4 ist und nach dem Satz von Liouville kanonische Transformationen das Volumen erhalten, haben wir $\mathrm{Vol}(u^{-m}(C)) = \mathrm{Vol}(C)$ für alle $m \geq 0$ und

$$\mathrm{Vol}(A) \geq \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{m\geq 0} u^{-m}(C)\Big) = \sum_{m\geq 0} \mathrm{Vol}(u^{-m}(C)) = \sum_{m\geq 0} \mathrm{Vol}(C).$$

Das kann passieren nur wenn $\mathrm{Vol}(C) = 0$ denn das Volumen von A ist endlich. $\square$

Beispiel 5.3. Es sei $M = \mathbb{R}$ und $H(q_1, p_1) = p_1$. Dann ist $\sigma_H(t, q_1, p_1) = (q_1 + t, p_1)$. Offensichtlich $A := T^*M = \mathbb{R}^2$ ist eine invariante Menge, aber $\mathrm{Vol}(A) = +\infty$. Wenn jetzt $B = I \times \mathbb{R}$, wobei I eine beschränkte Intervall ist, ist es klar, dass es T_I existiert, sodass $\sigma(T_I, B) \cap B = \varnothing$. Also gilt in dieser Fall die Behauptung im Poincares Wiederkehr nicht, d.h. die Voraussetzung $\mathrm{Vol}(A) < \infty$ notwendig ist.

Beispiel 5.4. Es sei $M = S^1$ und $H(q_1, p_1) = \frac{1}{2}p_1^2 - \cos q_1$. Man betrachte die Niveaumenge $A := \{(q_1, p_1) \in T^*S^1 \mid H(q_1, p_1) = 1\}$, die den kritischen Punkt $(\pi, 0)$ enthält. Dann, A ist invariant und $\mathrm{Vol}(A) = 0$ (A ist 1-dimensional), aber für alle $\epsilon > 0$ genügt die Menge $B = \{(q_1, p_1) \in A \mid -\pi + \epsilon < q_1 < \pi - \epsilon\} \subset A$ der Behauptung des obigen Satzes nicht.

6 Abstrakte symplektische Mannigfaltigkeiten

Die obige Diskussion weist darauf hin, dass sinvoll ist, abstrakte Mannigfaltigkeiten zu betrachten, die mit einem Objekt mit den Eigenschaften von ω vorgesehen sind.

Definition 6.1. Eine symplektische Form Ω auf einer Mannigfaltigkeit W ist eine 2-Form auf M, die sich um jeden Punkt als

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

schreiben lässt für eine bestimmte Wahl (nicht für jede!) von lokalen Koordinaten (q, p).

Bemerkung 6.2. Nach dem Satz von Darboux ist eine 2-Form Ω auf W symplektisch, genau dann, wenn für alle $w \in W$ die Bilinearform Ω_w nicht ausgeartet ist und das äußere Differential verschwindet, d.h. $d_w\Omega = 0$.

Angesichts des Satzes von Darboux wollen wir nun die Eigenschaften eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum untersuchen.

7 Lineare symplektische Algebra

Wir betrachten einen endlichen dimensionalen Vektorraum V und eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Da Ω nicht ausgeartet ist, gewinnen wir einen Isomorphismus $\delta : V \to V^*$. Der ist gegeben durch

$$\delta(v)[w] := \Omega(v, w).$$

Aufgabe 7.1. *Es sei W ein Vektorraum. Wir definieren $V = W \times W^*$ und $\Omega_W : V \times V \to \mathbb{R}$ durch*

$$\Omega_W\big((w_1, \phi_1), (w_2, \phi_2)\big) := \phi_2[v_1] - \phi_1[v_2].$$

Zeigen Sie, dass Ω_W symplektisch ist. Zu diesem Zweck, schreiben Sie die lineare Abbildung δ nach der Identifizierung $V^{**} = V$.

Definition 7.2. Es sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Der symplektische Orthogonal auf W ist der Vektorraum

$$W^\Omega := \big\{v \in V \mid \forall\, w \in W,\ \Omega(v,w) = 0\big\}.$$

Es gilt

$$\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$$

denn Ω ist nicht ausgeartet. Wir sagen, dass

- W symplektisch ist, wenn $W \cap W^\Omega = \{0\}$;
- W isotropisch ist, wenn $W \subset W^\Omega$ (in diesem Fall $\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$);
- W koisotropisch ist, wenn $W \supset W^\Omega$ (in diesem Fall $\dim W \geq \frac{1}{2}\dim V$);
- W Lagrangesch ist, wenn $W = W^\Omega$ (in diesem Fall $\dim W = \frac{1}{2}\dim V$).

Aufgabe 7.3. *Es sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $(W^\Omega)^\Omega = W$. Folgern Sie daraus, dass, wenn $L \subset V$ Lagrangesch ist, dann*

$$L \subset W \qquad \Longleftrightarrow \qquad W^\Omega \subset L.$$

Aufgabe 7.4. *Zeigen Sie, dass alle Untervektorräume mit Dimension 1 isotropisch sind und die mit Kodimension 1 coisotropisch sind. Wenn W Kodimension 1 hat, heißt $W^\Omega \subset W$ charakteristische Richtung von W.*

Satz 7.5. *Die Dimension von V ist gerade und wir setzen $\dim V =: 2n$ für irgendwelche $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $W \subset V$ ein isotropischer Vektorraum und wir wählen einen beliebige Basis $e_1, \ldots, e_k$ von W. Wir können dann diese Basis zu einer Basis $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots f_n$von V ergänzen, sodass für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j), \qquad \Omega(e_i, f_j) = \begin{cases} -1 & \textit{wenn } i = j, \\ 0 & \textit{wenn } i \neq j. \end{cases} \tag{7.1}$$

Beweis. Zuerst ergänzen wir $e_1, \ldots, e_k$ zur Basis einer Lagrangeschen Vektorraum $W' \supset W$. Wenn W nicht Lagrangesch ist, ist dann die Menge $W^\Omega \setminus W$ nicht leer und nehmen e_{k+1} ein beliebiges Element dieser Menge. Dann ist der Vektorraum $W + \mathbb{R}e_{k+1}$ immer noch isotropisch. Wir wiederholen dann das obige Verfahren auf $W + \mathbb{R}e_{k+1}$ statt W. Nach endlichen vielen Schritten gewinnen wir den gewünschten Basis eines Lagrangeschen Vektorraums $W' \supset W$. Nun betrachten wir den Vektorraum $W_1 \subset W'$, der von $e_2, \ldots, e_n$ aufgespannt ist. Da Ω nicht ausgeartet ist, ist die Menge $W_1^\Omega \setminus (W')^\Omega$ nicht leer. Es sei f_1 ein Element dieser Menge. Dann $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$ und bis auf die Multiplikation eines Skalars nehmen wir $\Omega(e_1, f_1) = -1$. Es sei nun $V_1 = (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}f_2)^\Omega$. Die Form $\Omega|_{V_1}$ ist symplektisch und $W_1 \subset V_1$ ist Lagrangesch mit Basis $e_2, \ldots, e_n$. Wir können nun per Induktion nach der Dimension von V daraus schließen, dass es eine Basis $e_2, \ldots, e_n, f_2, \ldots, f_n$ von V_1 mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Wenn wir die Vektoren e_1 und f_1 dazu hinzufügen, bekommen wir die gewünschte Basis von V. □

Definition 7.6. Eine Basis $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots f_n$ von V bezüglich Ω heißt symplektisch, wenn Ω in den entsprechende Koordinaten durch die Matrix J dargestellt wird. Es gelten nämlich die Gleichungen (7.1).

Wenn W ein Lagrangescher Untervektorraum ist mit Basis $e_1, \dots, e_n$, liefert der Satz 7.5 eine Basis $f_1, \dots, f_n$ eines Lagrangeschen Untervektorraums W_1, für den $W \cap W_1 = \{0\}$ gilt. Allgemeiner, wenn W' ein n-dimensionaler Untervektorraum ist, für den $W \cap W' = \{0\}$ gilt, trägt W' eine Basis derart

$$f'_i := f_i + \sum_{j=1}^{n} S_i^j e_j$$

für irgendwelche Matrix $S = (S_i^j) \in \mathrm{Mat}(n, n)$.

Aufgabe 7.7. *Welche Bedingung muss S erfüllen, sodass auch W' Lagrangesch ist?*

Aufgabe 7.8. *Es seien $W, W' \subset V$ Lagrangesche Vektorräume, für die $W \cap W' = \{0\}$. Es besteht dann der kanonische Isomorphismus*

$$(V, \Omega) \to (W \times W^*, \Omega_W), \qquad v \mapsto \big(w, \delta(w')|_W\big),$$

wobei $w \in W$ und $w' \in W'$ durch die Gleichung $v = w - w'$ eindeutig definiert sind.